венство равносильно системе уравнений:

$$d^2A_1^1+2dA_1^1\omega_1^1+A_1^1[d\omega^1+(\omega_1^1)^2+\omega_1^n\omega_n^1]+2B_1\omega_n^1+B_1(d\omega_n^1+\omega_n^1\omega_1^1+$$
$$+\omega_n^n\omega_n^1)=u+v\omega_1^1,$$
$$2dA_1^1\omega_1^n+A_1^1(d\omega_1^n+\omega_1^1\omega_1^n+\omega_1^n\omega_n^n)+d^2B_1+2dB_1\omega_n^n+$$
$$+B_1\cdot[d\omega_n^n+\omega_n^1\omega_1^n+(\omega_n^n)^2]=v\omega_1^n.$$

Из второго уравнения системы однозначно определяется v , а из первого уравнения u . Итак, u и v , удовлетворяющие указанному требованию, действительно существуют. Это означает, что линия $\ell(\gamma)$ лежит в своей соприкасающейся плоскости, то есть является плоской линией. Теорема доказана.

Библиографический список

1. С и л а е в а Г.М. О сети двойных линий пары гиперповерхностей в евклидовом пространстве / МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1987. 9с. Библиогр. 4 назв. Деп. в ВИНИТИ 08.07.87. №5399-В87.

2. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. научн. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

УДК 514.76

О ПОГРУЖЕНИИ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ $P_{m,m+1}$ БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

С.И.С о к о л о в с к а я

(Московский государственный университет)

В настоящей работе рассматриваются проективные связности P_{mn} , т.е. проективные связности, определенные на распределении m-мерных линейных элементов, касательных к n-мерному многообразию $(m<n)$. Показана возможность реализации таких связностей на специальным образом оснащенных поверхностях проективного пространства. Поставлена задача погружения связности P_{mn} в N-мерное проективное пространство. Доказано, что при $n=m+1$ такое погружение возможно, если $N>\frac{m^2}{2}+\frac{5m}{2}$. Указано на возможность получения более точной оценки: $N>\frac{m^2}{2}+2m$.

1. Рассмотрим главное расслоенное пространство проективной структуры $H(M_n, PD_n^1)$ с n-мерной базой и n-мерными слоями, касательными к базовому многообразию. Структурные уравнения этого расслоения [1]:

$$\begin{cases} d\theta_0^{\bar i}=\theta_0^{\bar k}\wedge\theta_{\bar k}^{\bar i}, \quad d\theta_j^{\bar i}=\theta_j^{\bar k}\wedge\theta_{\bar k}^{\bar i}+\theta_0^k\wedge\theta_{jk}^{\bar i}, \\ \theta_{\bar i}^{\bar i}=0, \quad \theta_{jk}^{k}=0, \quad i,j,k=1,\dots,n; \quad \bar i,\bar j,\bar k=0,1,\dots,n. \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим заданное на нашем расслоении распределение Δ , состоящее из m-мерных площадок, расположенных в касательных пространствах многообразия M_n . Уравнения такого распределения Δ :

$$\theta_\xi^u=\Lambda_{\xi j}^u\theta_0^j, \quad u=m+1,\dots,n; \quad \xi,\eta,\zeta=1,\dots,m.$$

В силу этих уравнений из (1) получим:

$$\begin{cases} d\theta_0^u=\theta_0^{\bar v}\wedge\theta_{\bar v}^u+\Lambda_{\xi i}^u\theta_0^\xi\wedge\theta_0^i, \quad d\theta_0^{\bar\xi}=\theta_0^{\bar\kappa}\wedge\theta_{\bar\kappa}^{\bar\xi}, \\ \bar v=0,m+1,\dots,n; \quad \bar\zeta,\bar\xi=0,1,\dots,m; \\ d\theta_\eta^{\bar\xi}=\theta_\eta^{\bar\zeta}\wedge\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi}+\theta_0^k\wedge(\Lambda_{\eta k}^u\theta_u^{\bar\xi}+\theta_{\eta k}^{\bar\xi}). \end{cases} \qquad (2)$$

Это структурные уравнения главного расслоенного пространства проективной структуры, базой которого является n-мерное многообразие, а слоями - m-мерные плоскости, принадлежащие распределению Δ . При этом формы $\theta_0^{\bar\xi}$ одновременно входят как в состав главных, так и в состав структурных форм.

Связность на этом расслоении определяется заданием объекта связности с компонентами $\Pi_{\bar\eta j}^{\bar\xi}$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} d\Pi_{0\eta}^{\bar\xi}+\Pi_{0\eta}^{\bar\zeta}\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi}-\Pi_{0\zeta}^{\bar\xi}\theta_\eta^\zeta=\Pi_{0\eta\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell, \quad \ell=1,\dots,n, \\ d\Pi_{0u}^{\bar\xi}+\Pi_{0u}^{\bar\zeta}\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi}-\Pi_{0\zeta}^{\bar\xi}\theta_u^\zeta-\Pi_{0v}^{\bar\xi}\theta_u^v-\theta_u^{\bar\xi}=\Pi_{0u\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell, \\ d\Pi_{\eta i}^{\bar\xi}-\Pi_{\zeta i}^{\bar\xi}\theta_\eta^\zeta+\Pi_{\eta i}^{\bar\zeta}\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi}-\Lambda_{\eta i}^v\theta_v^{\bar\xi}-\theta_{\eta i}^{\bar\xi}+\Pi_{\eta i}^{\bar\xi}\theta_0^0-\Pi_{\eta\zeta}^{\bar\xi}\theta_i^\zeta-\delta_i^u\Pi_{\eta v}^{\bar\xi}\theta_u^v=\Pi_{\eta i\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell, \end{cases} \qquad (3)$$

из рассмотрения которых делаем вывод, что объекты $(\Pi_{0\eta}^{\xi}),(\Pi_{0\eta}^{\bar\xi})$ являются тензорами, т.е. обращение их в ноль носит инвариантный характер. Мы ограничимся рассмотрением только тех связностей, для которых эти тензоры нулевые. Компоненты $\Pi_{0u}^{\bar\xi}$ обратим в ноль за счет дополнительной специализации в выборе репера. Тогда из уравнений (3) получим: $\Pi_{0\eta\ell}^{\bar\xi}=0$, $\theta_u^{\bar\xi}=-\Pi_{0u\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell$.

12 Зак. 1399

Формы $\tilde{\theta}^{\bar{\xi}}_{\bar{\eta}} = \theta^{\bar{\xi}}_{\bar{\eta}} + \Pi^{\bar{\xi}}_{\bar{\eta} j}\theta^j_0$ будут формами связности P_{mn}, т.к. они удовлетворяют уравнениям:

$$d\theta^u_0 = \theta^{\bar{v}}_0 \wedge \theta^u_{\bar{v}} + \Lambda^u_{\xi i}\theta^\xi_0 \wedge \theta^i_0, \quad d\tilde{\theta}^{\bar{\xi}}_0 = \tilde{\theta}^{\bar{\eta}}_0 \wedge \tilde{\theta}^{\bar{\xi}}_{\bar{\eta}} + R^{\bar{\xi}}_{0ue}\theta^u_0 \wedge \theta^e_0,$$

$$d\tilde{\theta}^{\bar{\xi}}_{\eta} = \tilde{\theta}^{\bar{\zeta}}_{\eta} \wedge \tilde{\theta}^{\bar{\xi}}_{\bar{\zeta}} + R^{\bar{\xi}}_{\eta\kappa e}\theta^\kappa_0 \wedge \theta^e_0,$$

где компоненты тензора кручения-кривизны выражаются через компоненты объекта связности и компоненты объекта $(\Pi^{\bar{\xi}}_{0ue}, \Pi^{\bar{\xi}}_{\eta\kappa e})$. Частным случаем такой связности является связность без кручения. В настоящей работе мы будем рассматривать пространство $P_{m,m+1}$ без кручения со структурными уравнениями:

$$\begin{cases} d\theta^u_0 = \theta^{\bar{v}}_0 \wedge \theta^u_{\bar{v}} + \Lambda^u_{\xi i}\theta^\xi_0 \wedge \theta^i_0, \quad d\theta^{\bar{\xi}}_0 = \theta^{\bar{\zeta}}_0 \wedge \theta^{\bar{\xi}}_{\bar{\zeta}}, \\ d\theta^{\bar{\xi}}_{\eta} = \theta^{\bar{\zeta}}_{\eta} \wedge \theta^{\bar{\xi}}_{\bar{\zeta}} + R^{\bar{\xi}}_{\eta\kappa e}\theta^\kappa_0 \wedge \theta^e_0, \\ u = m+1,\ \bar{v} = \overline{0, m+1};\ \kappa, e = \overline{1, m+1};\ \xi, \eta = \overline{1, m};\ \bar{\xi}, \bar{\eta} = \overline{0, m}. \end{cases} \tag{4}$$

З а м е ч а н и е. Компоненты тензора кручения-кривизны в уравнениях (4) связаны соотношениями

$$R^{\bar{\xi}}_{[\eta\zeta\mu]} = 0, \quad R^{\bar{\xi}}_{[\xi\zeta\eta]u} = 0, \quad \mu = \overline{1, m},$$

которые получаются при дифференцировании уравнений

$$d\theta^{\bar{\xi}}_0 = \theta^{\bar{\zeta}}_0 \wedge \theta^{\bar{\xi}}_{\bar{\zeta}}.$$

2. Зададимся вопросом погружения заданного пространства проективной связности P_{mn} в проективное пространство. Рассмотрим N-мерное проективное пространство P_N, его структурные уравнения:

$$d\Omega^J_{\mathcal{J}} = \Omega^K_{\mathcal{J}} \wedge \Omega^J_K, \quad \Omega^K_K = 0, \quad J, \mathcal{J}, K = 0, 1, \ldots, N.$$

Предположим, что в пространстве P_N имеется некоторая n-мерная поверхность Σ_n, которую мы отнесем к подвижному реперу $M_0, \ldots, M_n$. Формы Ω^i_0 будем считать главными формами поверхности Σ_n. Если точку M_0 поместить на поверхность, то уравнение поверхности Σ_n примет вид: $\Omega^\alpha_0 = 0$, $\alpha = n+1, \ldots, N$.

Для осуществления погружения требуется выделить в касательном расслоении к многообразию Σ_n поле m-мерных плоскостей S_m, установить на многообразии плоскостей S_m связность так, чтобы она совпала со связностью, которая определяется структурными уравнениями (4). Поместим точки M_i в n-мерную плоскость T_n, касательную к поверхности Σ_n. Тогда

$$\Omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{ij}\Omega^j_0, \quad \Lambda^\alpha_{[ij]} = 0.$$

После этого формы Ω^j_i превратятся в структурные формы главного расслоенного пространства $H(\Sigma_n, DP^1_n)$. Свяжем с точкой M_0 $(N-n)$-мерную плоскость T_{N-n}, имеющую с плоскостью T_n единственную общую точку, и поместим туда точки M_α. Тогда $\Omega^i_\alpha = \Lambda^i_{\alpha j}\Omega^j_0$. Выделим в T_{N-n} гиперплоскость, не проходящую через точку M_0, и поместим туда точки M_α. Тогда $\Omega^0_\alpha = \Lambda^0_{\alpha j}\Omega^j_0$. Формы Ω^τ_J станут структурными формами пространства проективной связности без кручения с n-мерной базой и n-мерными слоями, касательными к базе. Выделим в T_n два подпространства S_m и S_{n-m} с размерностями соответственно m и $n-m$, имеющие единственную общую точку M_0. Точки M_ξ $(\xi = \overline{1, m})$ помещаем в S_m, а точки M_u $(u = \overline{m+1, n})$ – в S_{n-m}. Тогда

$$\Omega^u_\xi = \Lambda^u_{\xi j}\Omega^j_0, \quad \Omega^\eta_u = \Lambda^\eta_{ui}\Omega^i_0.$$

Выделим в S_{n-m} гиперпространство, не проходящее через точку M_0, и поместим туда точки M_u. Тогда $\Omega^0_u = \Lambda^0_{uj}\Omega^j_0$. В результате получим:

$$d\Omega^u_0 = \Omega^0_0 \wedge \Omega^u_0 + \Lambda^u_{\eta j}\Omega^\eta_0 \wedge \Omega^j_0 + \Omega^v_0 \wedge \Omega^u_v,$$

$$d\Omega^{\bar{\xi}}_0 = \Omega^{\bar{\zeta}}_0 \wedge \Omega^{\bar{\xi}}_{\bar{\zeta}} + \Lambda^{\bar{\xi}}_{u\kappa}\Omega^u_0 \wedge \Omega^\kappa_0,$$

$$d\Omega^{\bar{\xi}}_\eta = \Omega^{\bar{\zeta}}_\eta \wedge \Omega^{\bar{\xi}}_{\bar{\zeta}} + (\Lambda^u_{\eta e}\Lambda^{\bar{\xi}}_{u\kappa} + \Lambda^\alpha_{\eta e}\Lambda^{\bar{\xi}}_{\alpha\kappa})\Omega^e_0 \wedge \Omega^\kappa_0$$

– структурные уравнения P_{mn}-пространства проективной связности с n-мерной базой и m-мерными слоями, которые являются подпространствами в касательных пространствах к базовому многообразию.

3. Перейдем к решению задачи погружения, сформулированной в п.2. Связность $P_{m,m+1}$ без кручения на распределении Δ, определяемую струтурными уравнениями (4), будем погружать в проективное пространство P_N. Система уравнений задачи состоит из уравнения поверхности, равенств слоевых и главных форм форм над проективным пространством:

$$\Omega^\alpha_0 = 0, \quad \Omega^u_0 = \theta^u_0, \quad \Omega^{\bar{\xi}}_{\bar{\eta}} = \theta^{\bar{\xi}}_{\bar{\eta}}, \quad \Omega^{\bar{\xi}}_u = Y^{\bar{\xi}}_{uu}\theta^u_0. \tag{5}$$

Последняя группа уравнений системы является следствием уравнений $\Omega^{\bar{\xi}}_0 = \theta^{\bar{\xi}}_0$. Продолжим систему (5):

$$\begin{cases} \theta_0^{\bar\xi} \wedge (\Omega_{\xi}^{u} - \Lambda_{\xi j}^{u} \theta_0^{j}) + \Omega_0^{u} \wedge (\Omega_u^{u} - \theta_u^{u}) = 0, \\ \theta_0^{i} \wedge \Omega_i^{\alpha} = 0,\ \Omega_\eta^{u} \wedge \Omega_u^{\bar\xi} + \Omega_\eta^{\alpha} \wedge \Omega_\alpha^{\bar\xi} = R_{\eta\kappa\ell}^{\bar\xi}\, \theta_0^{\kappa} \wedge \theta_0^{\ell}, \\ \Omega_u^{\alpha} \wedge \Omega_\alpha^{\bar\xi} + \theta_0^{u} \wedge \Delta Y_{uu}^{\bar\xi} + Y_{uu}^{\bar\xi} (\Omega_u^{u} - \theta_u^{u}) \wedge \theta_0^{u} = Y_{uu}^{\bar\xi} \Lambda_{\zeta i}^{u}\, \theta_0^{\zeta} \wedge \theta_0^{i}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\Delta Y_{uu}^{\bar\xi} = Y_{uu}^{\bar\xi} + Y_{uu}^{\bar\zeta}\, \theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi} - 2 Y_{uu}^{\bar\xi}\, \theta_u^{u} - Y_{uu}^{\bar\xi}\, \theta_0^{0}.$$

Исследуем систему (5) на совместность методом Кэлера. Для доказательства инволютивности системы надо построить неособую цепь интегральных элементов $E_1, \ldots, E_{m+1}$. При этом интегральный элемент E_q $(q=\overline{1,m+1})$ определяется соотношениями:

$$\Omega_i^{\alpha} = \ell_{i\mu}^{\alpha} \theta_0^{\mu},\ \Omega_\alpha^{\bar\xi} = \ell_{\alpha\mu}^{\bar\xi} \theta_0^{\mu},\ \Omega_\eta^{u} = \ell_{\eta\mu} \theta_0^{\mu},$$

$$\Delta Y_{uu}^{\bar\xi} = M_\mu^{\bar\xi} \theta_0^{\mu},\ \Omega_u^{u} - \theta_u^{u} = t_\mu \theta_0^{\mu},\ \mu = \overline{1,q}.$$

Коэффициенты с индексами $\mu = \overline{1,q-1}$ определяются при выборе интегральных элементов $E_1, \ldots, E_{q-1}$, а интегральный элемент E_q определяется коэффициентами $\ell_{iq}^{\alpha}, \ell_{\alpha q}^{\bar\xi}, \ell_{\eta q}, M_q^{\bar\xi}, t_q$, которые удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

при $q = 2, \ldots, m$

$$(S_q) \begin{cases} \ell_{aq}^{\alpha} = \ell_{qa}^{\alpha}\ (a=\overline{1,q-1}),\ \ell_{aq} = \ell_{qa} + \Lambda_{[aq]}^{u}, \\ \ell_{\eta a}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} - \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{\eta q}^{\alpha} = 2 R_{\eta a q}^{\bar\xi}, \\ \ell_{ua}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} - \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{uq}^{\alpha} = Y_{uu}^{\bar\xi} \Lambda_{[aq]}^{u}; \end{cases}$$

при $q=m+1$

$$(S_{m+1}) \begin{cases} \ell_{aq}^{\alpha} = \ell_{qa}^{\alpha},\ \ell_{aq} = \Lambda_{aq}^{u} + t_a, \\ \ell_{\eta a}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} - \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{\eta q}^{\alpha} - Y_{ua}^{\bar\xi} \ell_{\eta q} = -Y_{uq}^{\bar\xi} \ell_{\eta a} + 2 R_{\eta a q}^{\bar\xi}, \\ \ell_{ua}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} - \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{uq}^{\alpha} = M_a^{\bar\xi} - Y_{uq}^{\bar\xi} t_a + Y_{uq}^{\bar\xi} \Lambda_{aq}^{u}. \end{cases}$$

Цепь будет неособой, если можно последовательно разрешать системы (S_q) при $q=\overline{2,m+1}$, чтобы при каждом q система имела максимальный ранг. Заметим, что ранг системы будет максимальным не только при выбранных нами значениях параметрических коэффициентов, но и в некоторых окрестностях этих значений. Перейдем к построению неособой цепи интегральных элементов. При $q=1$ все коэффициенты будут параметрическими. Положим их равными нулю, за исключением

$$\ell_{i1}^{m+1+\bar\xi+1} = \delta_i^{\bar\xi+1},\quad \bar\xi = \overline{0,m};\ i = \overline{1,m+1}.$$

При $q = \overline{2,m+1}$ из первых двух уравнений системы (S_q), независимо от значений других коэффициентов, определяющих E_q, находим $\ell_{aq}^{\alpha}, \ell_{aq}$. Заметим, что среди уравнений

$$\ell_{\eta a}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} + \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{\eta q}^{\alpha} = 2 R_{\eta a q}^{\bar\xi}$$

системы (S_q) $q=\overline{1,m}$ и соответствующих им уравнений системы (S_{m+1}) имеются зависимые. Используя замечание, выделим среди них независимые. После этого получим системы:

при $q=\overline{2,m}$

$$(S1_q) \begin{cases} \ell_{ba}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} - \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{bq}^{\alpha} = 2 R_{baq}^{\bar\xi},\ b > a,\ a = \overline{1,q-1}, \\ \ell_{ua}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} - \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{uq}^{\alpha} = Y_{uu}^{\bar\xi} \Lambda_{[aq]}^{u},\ b = \overline{1,m+1}; \end{cases}$$

при $q=m+1$

$$(S1_{m+1}) \begin{cases} \ell_{ba}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} = \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} \ell_{bq}^{\alpha} + Y_{ua}^{\bar\xi} \ell_{bq} - Y_{uq}^{\bar\xi} \ell_{ba} + 2 R_{baq}^{\bar\xi}, \\ \ell_{ua}^{\alpha} \ell_{\alpha q}^{\bar\xi} - \ell_{uq}^{\alpha} \ell_{\alpha a}^{\bar\xi} = M_{uq}^{\bar\xi} t_a + Y_{uu}^{\bar\xi} \Lambda_{aq}^{u}, \end{cases}$$

каждая из которых состоит из $(m+1)$ $Y(q) = (m+1)(q-1)(m+2-q/2)$ уравнений, вообще говоря, независимых.

Разобьем систему $S1_q$ на $m+1$ подсистем с разными $\bar\xi = \overline{0,m}$. Каждую подсистему будем разрешать относительно $\ell_{m+2,q}^{\bar\xi}, \ell_{m+3,q}^{\bar\xi}, \ldots, \ell_{m+1+Y(q),q}^{\bar\xi}$. Остальные коэффициенты будут параметрическими. Полагаем их равными нулю, кроме

$$\ell_{q+\mu_q-1,q}^{m+1+Y(q)+\nu_q} = \delta_{\mu_q}^{\nu_q},\quad \mu_q, \nu_q = 1, \ldots, m+2-q.$$

После этого получим $m+1$ подсистем с единичными матрицами при неизвестных.

Теперь оценим размерность N объемлющего проективного пространства. Для того, чтобы системы (S_q) $q = 2, \ldots, m+1$ можно было разрешить описанным способом, необходимо, чтобы максимальный индекс α не превосходил N, т.е. $\forall q = 2, \ldots, m+1$: $m+1+Y(q) \leq N$. Тогда имеем условие $N > \frac{1}{2} m(m+3) + m$.

З а м е ч а н и е. Если аналогичные рассуждения провести для связности $P_{m,m+1}$ с кручением, то мы получим такой же результат. Итак доказана

Т е о р е м а. Всякое пространство проективной связности с $(m+1)$-мерной базой и m-мерными слоями, касательными к базе, можно погрузить в N-мерное проективное пространство, если размерность $N > \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} 5m$.

З а м е ч а н и е. Полученная оценка размерности N объемлющего проективного пространства допускает уточнение. Автору удалось доказать (посредством значительно более сложных рассуждений) возможность погружения в случае $N > \frac{m^2}{2} + 2m$.

Автор выражает благодарность Рыбникову А.К., под чьим руководством выполнена эта работа.

Библиографический список

1. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139-190.

УДК 514.76

СИММЕТРИЧЕСКИЕ 2-ТЕНЗОРЫ С ПОСТОЯННЫМ СЛЕДОМ

С.Е.Степанов

(Владимирский педагогический институт)

В предлагаемой работе предпринята попытка соединить два развивающихся независимо метода дифференциальной геометрии: "технику Бохнера" и "метод линейных представлений". Объектом для изучения нами выбраны поля симметрических 2-тензоров с постоянным следом на римановом многообразии. Хотя для иллюстрации эффективности исследований может быть взят другой объект.

1. Рассмотрим на n-мерном римановом многообразии (M, g) со связностью Леви-Чивита ∇ симметрическое тензорное поле φ с постоянным следом ($tr_g \varphi = const$). Тензорное поле $\nabla\varphi$ есть сечение расслоения $T^*M \otimes S^2_0 M \to M$. Разложение этого расслоения на неприводимые относительно действий ортогональной группы $O(n)$ компоненты имеет вид [1] : $T^*M \otimes S^2_0 M \cong S^3_0 M \oplus (T^*M) \oplus Y^1_2$. Тогда

$$\nabla\varphi = Pr_{S^3_0 M}\nabla\varphi + Pr_{(T^*M)}\nabla\varphi + Pr_{Y^1_2}\nabla\varphi, \tag{1}$$

где

$$(Pr_{S^3_0 M}\nabla\varphi)(X,Y,Z) = (\delta^*\varphi)(X,Y,Z) + \frac{2}{3(n+2)}\{(\delta\varphi)(X)g(Y,Z) + (\delta\varphi)(Y)g(Z,X) + (\delta\varphi)(Z)g(X,Y)\},$$

$$(Pr_{(T^*M)}\nabla\varphi)(X,Y,Z) = \frac{n}{(n+2)(n-1)}\{\frac{2}{n}(\delta\varphi)(X)g(Y,Z) - (\delta\varphi)(Y)g(X,Z) - (\delta\varphi)(Z)g(Y,X)\}.$$

И, наконец, ковариантная производная $\nabla\varphi$ будет принадлежать подпространству Y^1_2 в том и только в том случае, если $\delta^*\varphi = \delta\varphi = 0$. Здесь дифференциальный оператор δ^* представляет собой композицию ковариантной производной с симметризацией, а δ – формально сопряженный к нему оператор, называемый дивергенцией.

Вследствие разложения (1) инвариантным образом выделяются на (M, g) семь классов симметрических тензорных полей с постоянным следом: $R_0 = \{\varphi / \nabla\varphi = 0\}$, $R_1 = \{\varphi / \nabla\varphi \in S^3_0 M\}$, $R_2 = \{\varphi / \nabla\varphi \in (T^*M)\}$, $R_3 = \{\varphi / \nabla\varphi \in Y^1_2\}$,

$R_4 = R_1 \oplus R_2$, $R_5 = R_1 \oplus R_3$, $R_6 = R_2 \oplus R_3$

Например, класс R_1 состоит из кодаццевых тензорных полей [2] с постоянным следом.

2. Полагаем (M, g) компактным ориентированным многообразием. Для 1-формы θ с компонентами

$$\theta(e_i) = \sum_{j=1}^{n}\{\sum_{k=1}^{n}(\nabla_{e_k}\varphi)(e_i, e_j)\,\varphi(e_k, e_j) + (\delta\varphi)(e_j)\,\varphi(e_i, e_j)\},$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – локальное поле ортонормированных реперов; на основании теоремы Грина выводим следующую интегральную формулу [3]:

$$\int_M \sum_{i,j,k=1}^{n}\{S(e_i, e_j)\,\varphi(e_i, e_k)\,\varphi(e_j, e_k) - R(e_i, e_j, e_k, e_l)\,\varphi(e_i, e_k)\,\varphi(e_j, e_l) + (\nabla_{e_i}\varphi)(e_j, e_k)(\nabla_{e_j}\varphi)(e_i, e_k) - (\delta\varphi)(e_j)(\delta\varphi)(e_j)\}\,dv = 0. \tag{2}$$

Здесь R и S – тензоры кривизны и Риччи многообразия (M, g).

В произвольной точке $x \in M$ перейдем к новому ортонормированному реперу $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, такому, что $\varphi(e'_i, e'_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, тогда

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\{S(e_i, e_j)\varphi(e_i, e_k)\varphi(e_j, e_k) - R(e_i, e_j, e_k, e_l)\,\varphi(e_i, e_k)\,\varphi(e_j, e_l)\} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i, e'_j, e'_i, e'_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Если, кроме того, принять во внимание разложение (1), то интегральной формуле (2) можно придать вид:

$$\int_M \{\sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i, e'_j, e'_i, e'_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 + 2\,\|Pr_{S^3_0 M}\nabla\varphi\|^2 - \|Pr_{Y^1_2}\nabla\varphi\|^2 - n\,\|Pr_{(T^*M)}\nabla\varphi\|^2\}\,dv = 0. \tag{3}$$

Теперь нетрудно определить, при каких условиях тот или иной класс тензорных полей из приведенного в первой части списка будет пустым на (M, g). Так, например, для тензорных полей класса